Caderno de Cultura e Ciência, Ano VII, v.11, n.2, dez, 2012
Universidade Regional do Cariri – URCA
DOI: 10.14295/cad.cult.cienc.v11i2.522

Artigo Científico
ISSN 1980-5861

TERMO DE CHERN-SIMONS MISTO E A ESTATÍSTICA FRACIONÁRIA

Alan C. Santos[1], Francisco Augusto S. Nobre[2], Job Saraiva F. Neto[3], Tiago Homero Mariz do Nascimento[4]

Resumo

Neste trabalho estudamos um modelo que é descrito por uma Lagrangiana que carrega o termo de Chern-Simons Misto acoplado com o campo de matéria em uma teoria em que há quebra de simetria de Lorentz e analisamos a influência do termo de Chern-Simons para a estatística fracionária do sistema.

Palavras-Chave: Dirac, Chern-Simons Misto, Estatística Fracionária.

TERM OF THE CHERN-SIMONS MIXED AND THE FRACTIONAL STATISTICS

Abstract

In this work we will studies a model that is describe for a Lagrangian that load the mixed term Chern-Simons coupled with the matter field in a theory that there break Lorentz Symmetry and we will analyze the influence of the mixed term Chern-Simons for the fractional statistical of the system.

Keywords: Dirac, Chern-Simons Mixed, Fractional Statistics.

Introdução

O formalismo de Dirac (1964) tem sido muito utilizado em estudos de Lagrangianas com o termo de Chern-Simons e Lagrangianas com o termo de Pauli, para a análise de Spin fracionário. A presença do termo de Chern-Simons convencional em modelos em (2+1) dimensões tem sido usado com frequência para explicar o surgimento do chamado spin fracionário. Nobre e Almeida (1999) mostraram, com um modelo Abelian-Chern-Simons-Higgs, que o termo do tipo Pauli acoplado ao campo de matéria também contribuía para a estatística fracionária do sistema. Recentemente Furtado e Nobre (2011) mostraram, em um modelo Abelian-Higgs, que o termo de Chern-Simons não era essencial para a estatística fracionária.

Além do termo de Chern-Simons convencional, existe o termo de Chern-Simons Misto. Esse termo difere do termo convencional pelo fato de estar acoplado com um quadri-vetor que carrega as informações sobre dinâmica do campo de matéria. B. Charneski et al. (2009) mostrou que o termo de Chern-Simons Misto pode ser induzido a partir de um modelo de campos femiônicos em (2+1) Dimensões com quebra de simetria de Lorentz.

[1] Departamento de Física da Universidade Regional do Cariri - URCA: alan.costa.1991@gmail.com
[2] Professor do Departamento de Física da Universidade Regional do Cariri - URCA.
[3] Estudando de Mestrado do Departamento de Física Teórica da Universidade Federal de Alagoas - UFAL.
[4] Professor do Departamento de Física Teórica da Universidade Federal de Alagoas - UFAL.

Objetivos

Este trabalho tem como objetivo aplicar a formulação de Dirac em uma Lagrangiana, que “carrega” um campo vetorial de fundo constante que viola simetria de Lorentz e o termo de Chern-Simons Misto, para analisar, além dos vínculos que restringem as possíveis configurações do sistema, a existência de anomalias na estatística fracionária do sistema.

Método

O método de Dirac para investigar os vínculos presentes na teoria consiste em verificar a evolução temporal dos vínculos primários (Vínculos que surgem da definição dos Momenta). Tal verificação exige que conheçamos o Hamiltoniano total, e para isso precisamos do Hamiltoniano canônico que por sua vez depende dos momenta dos campos em questão. Então inicialmente vamos calcular os momenta canonicamente conjugados aos campos. Inicialmente consideremos a densidade Lagrangiana abaixo:

$$\mathcal{L} = -\frac{{e_A}^2}{48\pi m} F_{\mu\nu}(A)F^{\mu\nu}(A) + \frac{m}{12\pi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{\mu\lambda\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\lambda A_\nu + \frac{{e_A}^2}{24\pi m}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu$$

Equação 1

onde $F_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$, Φ é um campo de matéria, ϑ é um termo que carrega um quadri-vetor de fundo constante e que viola a simetria de Lorentz e $\varepsilon^{\mu\lambda\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$ é o tensor de Levi-Civita. Assim podemos, através de algum algebrismo, escrever a Lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{{e_A}^2}{24\pi m}\left[\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu\right] + \frac{m}{12\pi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{\mu\lambda\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\lambda A_\nu + \frac{{e_A}^2}{24\pi m}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu$$

Equação 2

Com a Lagrangiana escrita dessa forma, passamos a calcular os momenta anonicamente conjugados aos campos, assim obtivemos:

$$\pi^0 = \frac{{e_A}^2}{12\pi m}\left(\partial_\mu A^\mu\right)$$

Equação 3

$$\pi^i = -\frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{j0i}\partial_j\Phi$$

Equação 4

$$\Sigma = -\frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{0ij}\partial_i A_j + \frac{m}{6\pi}\partial^0\Phi$$

Equação 5

$$\Xi = 0$$

Equação 6

onde π^0, π^i, Σ e Ξ são os momenta canonicamente conjugados aos campos A^0, A^i, Φ e ϑ, respectivamente. Assim, tiramos as únicas relações de vínculos da teoria, que são:

$$V^1 = \pi^i + \frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{j0i}\partial_j\Phi$$

Equação 7

$$V^2 = \Xi$$

Equação 8

Então montamos o Hamiltoniano Canônico que é dado por:

$$H_C = \pi^\mu\dot{A}_\mu + \Xi\dot{\Phi} + \Sigma\dot{\vartheta} - \mathcal{L}$$

$$H_C = -\frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{j0i}\partial_j\Phi\partial_0 A_i + \frac{{e_A}^2}{12\pi m}\partial_\mu A^\mu\partial_0 A^0 + \partial_0\Phi\left(-\frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{0ij}\partial_i A_j + \frac{m}{6\pi}\partial^0\Phi\right) + \frac{{e_A}^2}{48\pi m}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{m}{12\pi}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \frac{e_A\vartheta}{6\pi}\varepsilon^{\mu\lambda\nu}\partial_\mu\Phi\partial_\lambda A_\nu - \frac{{e_A}^2}{24\pi m}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu$$

Abrindo os termos em suas partes espaciais e temporais para tentar simplificar do Hamiltoniano canônico, encontramos:

$$H_C = \frac{e_A{}^2}{24\pi m}\partial_0 A^0 \partial_0 A^0 + \frac{e_A{}^2}{12\pi m}\partial_j A^j \partial_0 A^0 + \frac{m}{12\pi}\partial_0 \Phi \partial^0 \Phi + \frac{e_A{}^2}{24\pi m} F_{i0}F^{i0} + \frac{e_A{}^2}{48\pi m} F_{ij}F^{ij} - \frac{m}{12\pi}\partial_j \Phi \partial^j \Phi + \frac{e_A \vartheta}{6\pi}\varepsilon^{ik0}\partial_i \Phi \partial_k A_0 - \frac{e_A{}^2}{12\pi m}\partial_0 A^0 \partial_i A^i - \frac{e_A{}^2}{24\pi m}\partial_i A^i \partial_j A^j$$

E por fim, vamos montar o Hamiltoniano Total incluindo os vínculos primários da teoria.

$$H_T = H_C + \lambda_0 V^1 + \lambda_1 V^2$$

$$H_T = \frac{e_A{}^2}{24\pi m}\partial_0 A^0 \partial_0 A^0 + \frac{e_A{}^2}{12\pi m}\partial_j A^j \partial_0 A^0 + \frac{m}{12\pi}\partial_0 \Phi \partial^0 \Phi + \frac{e_A{}^2}{24\pi m} F_{i0}F^{i0} + \frac{e_A{}^2}{48\pi m} F_{ij}F^{ij} - \frac{m}{12\pi}\partial_j \Phi \partial^j \Phi + \frac{e_A \vartheta}{6\pi}\varepsilon^{ik0}\partial_i \Phi \partial_k A_0 - \frac{e_A{}^2}{12\pi m}\partial_0 A^0 \partial_i A^i - \frac{e_A{}^2}{24\pi m}\partial_i A^i \partial_j A^j + \lambda_0 \Xi + \lambda_1 \left(\pi^i + \frac{e_A \vartheta}{6\pi}\varepsilon^{j0i}\partial_j \Phi\right)$$

Passamos então a analisar a evolução temporal dos vínculos primários para verificar se eles dão origem a novos vínculos, ditos secundários. Concluímos que não há vínculos secundários na teoria.

Como o método de Dirac consiste em "eliminar" da teoria os vínculos que não geram Transformações de Gauge (vínculos de segunda classe), passamos a identificar quais desses são vínculos de segunda classe. Fizemos isso calculando o comutador de Poisson entre os vínculos e encontramos:

$$\{V^1, V^2\} = -\frac{e_A}{6\pi}\varepsilon^{j0i}\partial_j \Phi$$

Assim, concluímos que os vínculos V^1 e V^2 são de segunda classe. Montando a matriz $C_{ij}{}^{-1}$ dos vínculos de segunda classe, temos:

$$C_{ij}{}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{6\pi}{e_A \varepsilon^{j0i}\partial_j \Phi} \\ -\dfrac{6\pi}{e_A \varepsilon^{j0i}\partial_j \Phi} & 0 \end{bmatrix}$$

Calculando os parênteses de Dirac dos campos e momenta da teoria, vimos que os únicos parênteses de Dirac diferentes de zero são:

$$\{A_0, \pi^0\}_D = 1$$

$$\{A_i, \vartheta\}_D = -\frac{6\pi}{e_A \varepsilon^{j0i}\partial_j \Phi}$$

$$\{A_i, \pi^i\}_D = 1$$

$$\{\Phi, \Sigma\}_D = 1$$

$$\{\vartheta, \Xi\}_D = 1$$

Agora, vamos calcular o tensor Energia-Momentum, dado por:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

onde $g^{\mu\nu} = diag(1, -1, -1)$. Desenvolvendo encontramos o tensor em função dos campos como:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left[-\frac{e_A{}^2}{48\pi m}\left(g^{\alpha\sigma}F_{\mu\alpha}F_{\nu\sigma} + g^{\alpha\sigma}F_{\alpha\mu}F_{\sigma\nu}\right) + \frac{m}{12\pi}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi \right.$$
$$- \frac{e_A\vartheta}{6\pi}\left(\varepsilon^{\mu\lambda\alpha}g_{\lambda\rho}g_{\alpha\sigma}\partial^\nu\Phi\partial^\rho A^\sigma + \varepsilon^{\alpha\mu\lambda}g_{\alpha\sigma}g_{\lambda\rho}\partial^\sigma\Phi\partial^\nu A^\rho + \varepsilon^{\alpha\lambda\mu}g_{\alpha\sigma}g_{\lambda\rho}\partial^\sigma\Phi\partial^\rho A^\nu\right)$$
$$\left. + \frac{e_A{}^2}{24\pi m}\left(g^{\alpha\sigma}\partial_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\sigma + g^{\alpha\sigma}\partial_\alpha A_\sigma\partial_\mu A_\nu\right)\right]$$

Calculando o tensor T_{0j}, temos:

$$T_{0j} = \left[\frac{e_A{}^2}{12\pi m}F_{i0}F_{ij} + \partial_j\Phi\Sigma + \frac{e_A\vartheta}{2\pi}\varepsilon^{ik}\partial_j\Phi\partial_i A_k + 2\pi^k F_{kj} + 2\partial_0 A_j\pi^0\right]$$

Calculamos então o operador momentum angular em (2+1) dimensões que é dado por:

$$L_a = \int d^2x\varepsilon^{ij}x_i T_{0j}$$

E assim, encontramos que:

$$L_a = \int d^2x\left[\frac{e_A{}^2}{12\pi m}\varepsilon^{ij}x_i F_{i0}F_{ij} + \varepsilon^{ij}x_i\partial_j\Phi\Sigma + \varepsilon^{ij}x_i\frac{e_A\vartheta}{2\pi}\varepsilon^{ik}\partial_j\Phi\partial_i A_k + \varepsilon^{ij}x_i 2\pi^k F_{kj} + \varepsilon^{ij}x_i 2\partial_0 A_j\pi^0\right]$$

Para verificar a estatística fracionária precisamos calcular o comutador de Dirac entre o operador momentum angular e o campo de matéria. Assim, concluímos que:

$$\{L_a, \Phi\}_D = -\varepsilon^{ij}x_i\partial_j\Phi$$

Usando a regra de quantização de Dirac, temos:

$$\{\hat{L}_a, \hat{\Phi}\} = -i\hbar\varepsilon^{ij}x_i\partial_j\Phi$$

Portanto, temos:

$$\{\hat{L}_a, \hat{\Phi}\} = i(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\nabla})\Phi(x)$$

Equação 9

Resultados e Discussão

O único termo presente na equação 9 é o momentum angular intrínseco ao sistema. Esse termo também aparece em Dunne e Shin; Kim (1992). A princípio já era esperado o surgimento do mesmo pelo fato de ser uma característica do sistema que independe da teoria usada para construir a Lagrangiana que descreve a dinâmica do sistema. Este termo foi encontrado por Shin; Kim (1992b) em uma teoria de calibre Abelian Chern-Simons.

Conclusões

Mas o que notamos é que, diferentemente de Nobre e Almeida (1999); Furtado e Nobre (2011) e Shin; Kim (1992a), não há nenhuma contribuição anômala à estatística fracionária do sistema e isso nos leva a concluir em um modelo de campos fermiônicos com violação de simetria de lorentz não há contribuição do termo de Chern-Simons Misto para o spin fracionário.

Referências

CHARNESKI, B.; GOMES, M.; MARIZ , T.; NASCIMENTO, J. R.; SILVA, A. J.; Dynamical Lorentz symmetry breaking in 3D and charge fractionalization. **Physical Review D,** v. 79, p. 065007, 2009.

DIRAC, P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. Cidade: Yeshiva University Press, 1964.

FURTADO, J. S. N.; NOBRE, F. A. S.; The Pauli Term as Generator of Fractional Spin. **Modern Physics Letters A**, v. 26, p. 1427–1432, 2011.

NOBRE , F. A. S.; ALMEIDA, C. A. S. Pauli's Term and Fractional Spin**. *Physics Letters B,*** v. 455, p. 213–216, 1999.

SHIN, H.; KIM, J.-K.; Hamiltonian formulation of Chern-Simons theory with matter fields in the broken-symmetry phase. **Physical Review D,** v. 46, p. 868, 1992b.

SHIN, H.; KIM, W.-T.; KIM, J.-K.; BRST Formulation of Chern-Simons gauge theory coupled to matter fields. **Physical Review D**, v. 46, p. 2730, 1992a.

●