Universidade Regional do Cariri - URCA

CADERNOS DE CULTURA E CIÊNCIA
VOLUME 3 | Nº 1 - 2008
ISSN 1980-5861

Cadernos de Cultura e Ciência
Culture and Science Periodicals

Sobre a classe de diferenciabilidade de quocientes de polinômios homogêneos.

About the Differentiability Class of the Quotient of Homogeneous Polynomials.

Carlos Humberto Soares Júnior,[1] Franscisca Leidmar Josué Vieira[2]
Leandro Barbosa Paz[3]

Universidade Regional do Cariri, Departamento de Matemática, Crato, CE, Brasil

Universidade Regional do Cariri – URCA
CADERNOS DE CULTURA E CIÊNCIA
Vol. 3- Nº 1 2008

Sobre a classe de diferenciabilidade de quocientes de polinômios homogêneos.

About the Differentiability Class of the Quotient of Homogeneous Polynomials.

Carlos Humberto Soares Júnior[1], Franscisca Leidmar Josué Vieira[2] Leandro Barbosa Paz[3]
Departamento de Matemática, Universidade Regional do Cariri

Resumo

Neste artigo investigamos a classe de diferenciabilidade de funções dadas como o quociente de polinômios homogêneos e estabelecemos condições, em função do grau de homogeneidade destes polinômios, para que essas funções quocientes tenham uma determinada classe de diferenciabilidade.

Palavras chave: Classe de diferenciabilidade; Funções quocientes; Polinômios homogêneos.

Abstract

In this article we investigate the differentiability class of functions given as a quotient of homogeneous polynomials and stability conditions, at the homogeneous degree of these polynomials, in such way that this kind of functions has a determinate class of differentiability.

Key words: *Class of Differentiability; Quotient Functions; Homogeneous Polynomials*

[1] Centro de Ciências Tecnológicas, Departamento de Matemática – Campus Crajubar. Universidade Regional do Cariri Av. Leão Sampaio km 2 s/n, bairro Triângulo. Cep. 63040-000. Juazeiro do Norte, Ceará, Brasil. Telefone: 88 3102-1124 E-mail: humberto@urca.br
[2] Centro de Ciências Tecnológicas, Departamento de Matemática – Campus Crajubar. Universidade Regional do Cariri Av. Leão Sampaio km 2 s/n, bairro Triângulo. Cep. 63040-000. Juazeiro do Norte, Ceará, Brasil. Telefone: 88 3102-1124 E-mail: leidmarlady@gmail.com
[3] Centro de Ciências Tecnológicas, Departamento de Matemática – Campus Crajubar. Universidade Regional do Cariri Av. Leão Sampaio km 2 s/n, bairro Triângulo. Cep. 63040-000. Juazeiro do Norte, Ceará, Brasil. Telefone: 88 3102-1124 E-mail: leandro_juazeiro@yahoo.com.br

Universidade Regional do Cariri – URCA
CADERNOS DE CULTURA E CIÊNCIA
Vol. 3- Nº 1 2008

Introdução e Conceitos Básicos

Determinar se germes de famílias de funções é trivial com respeito a alguma relação de equivalência é um dos principais objetivos em teoria de singularidades. A principal técnica envolvida é a utilização de campos de vetores controlados que trivializem a família. Tais campos aparecem como quociente de funções, e as linhas integrais, as quais trivializam a família, terão a mesma categoria de tais campos.

Neste artigo investigamos a classe de diferenciabilidade de funções dadas como o quociente de polinômios homogêneos e estabelecemos condições, em função do grau de homogeneidade destes polinômios, para que essas funções quocientes tenham uma determinada classe de diferenciabilidade. Este artigo é inspirado no trabalho de RUAS [1] (1986).

Definição 1 - Uma função $f:\Re^n \to \Re$ é de classe C^ℓ se, para todo $x \in \Re^n$, existem todas as derivadas parciais $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ até a ordem ℓ e estas são contínuas.

Ex.: $f(x) = x^\ell \|x\|$ e $f(x) = x^{2\ell+1} \sin\dfrac{1}{x}$ são de classe C^ℓ e não são de classe $C^{\ell+1}$.

Definição 2 - Um monômio $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}$ é dito de grau d quando $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = d$.

Definição 3 - Um polinômio do tipo $P(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{m} a_i (x_1^{r_{i_1}} \ldots x_n^{r_{i_n}})$, em que $r_{i_1} + \ldots + r_{i_n} = d$, é chamado um *polinômio homogêneo de grau d*. Observe que todos os seus monômios têm grau igual a *d*.

Ex.: $P(x,y,z) = x^3 + 2x^2 y + xy^2 - 8y^3$ é um polinômio homogêneo de grau 3.

Definição 4 - Definimos a esfera de dimensão $n-1$ como sendo o conjunto $S^{n-1} = \{x = (x_1,\ldots,x_n) \in \Re^n; \quad {x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 = 1\}$.

Observe que $x \in S^{n-1} \Leftrightarrow \|x\| = 1$.

Universidade Regional do Cariri – URCA
CADERNOS DE CULTURA E CIÊNCIA
Vol. 3- Nº 1 2008

Resultado Principal

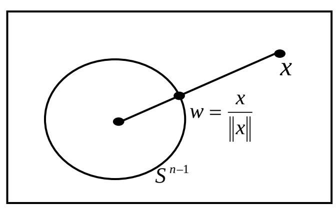
Lema 1 - Sejam $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinômios homogêneos na variável $x=(x_1,\ldots,x_n)$ tais que $min\{\|P_2(x)\|;\, x\in S^{n-1}\}>0$, e $grau(P_1)=grau(P_2)+2$. Então, $F(x)=\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}$ é de classe C[1].

Demonstração: Usando as regras de derivação, temos que,

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\right)=\ldots=\frac{\overbrace{\left(\dfrac{\partial P_1(x)}{\partial x_i}\right)P_2(x)+P_1(x)\left(\dfrac{\partial P_2(x)}{\partial x_i}\right)}^{h_i(x)}}{\left[P_2(x)\right]^2}=\frac{h_i(x)}{\left[P_2(x)\right]^2}$$

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=\frac{h_i(x)}{\left[P_2(x)\right]^2}$$, onde $grau(h_i(x))=2d+1$, com $d=grau(P_2(x))$.

Dado $x\in\Re^n$ arbitrário existem $t\in\Re$ e $w\in S^{n-1}$ tais que $x=tw$ (ver *figura 1* abaixo).



Desta forma,

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial F(tw)}{\partial x_i}=\frac{h_i(tw)}{\left[P_2(tw)\right]^2}=\frac{t^{2d+1}h_i(w)}{t^{2d}\left[P_2(w)\right]^2}=t\frac{h_i(w)}{\left[P_2(w)\right]^2}.$$

Como h_i é um polinômio e S^{n-1} é compacto, existe $c_1\in\Re$ tal que $\|h_i(w)\|\le c_1$, para todo $w\in S^{n-1}$.

Analogamente, como $P_2^{\,2}$ é um polinômio, S^{n-1} é compacto, e $min\{\|P_2(x)\|;\, x\in S^{n-1}\}>0$, existe uma constante positiva $c_2\in\Re$ tal que $\|P_2^2(w)\|\ge c_2$, para todo $w\in S^{n-1}$.

Portanto, temos que $\lim_{x\to 0}\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0} t\,\frac{h_i(w)}{P_2^{\,2}(w)}=0$, pois $\frac{h_i(w)}{P_2^{\,2}(w)}$ é limitada sobre S^{n-1}. Logo basta definirmos $\frac{\partial F(0)}{\partial x_i}=0$ e teremos que $\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}$ é contínua. Assim $F(x)$ é de classe C$^{\ell}$. ■

Teorema 1 - Sejam $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinômios homogêneos na variável $x=(x_1,\dots,x_n)$ tais que: $min\{\|P_2(x)\|;\ x\in S^{n-1}\}>0$, e $grau(P_1)=grau(P_2)+\ell+1$ em que ℓ é um número inteiro positivo. Então, $F(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ é de classe C$^{\ell}$.

Demonstração: Mostremos por indução em ℓ.

- O caso em que ℓ=1 é uma conseqüência imediata do *Lema 1*.
- Suponhamos que o teorema seja válido para $\ell-1$, ou seja, toda função $J(x)=\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$, com $grau(Q_1(x))=grau(Q_2(x))+\ell$ e $min\{\|Q_2(x)\|;\ x\in S^{n-1}\}>0$, tem-se que $J(x)$ é de classe C$^{\ell-1}$.

- Pela hipótese temos que

$F(x)=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, com $grau(P_1(x))=grau(P_2(x))+\ell+1$.

Portanto,

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\right)=\dots=\frac{\overbrace{\left(\frac{\partial P_1(x)}{\partial x_i}\right)P_2(x)+P_1(x)\left(\frac{\partial P_2(x)}{\partial x_i}\right)}^{h_i(x)}}{\left[P_2(x)\right]^2}=\frac{h_i(x)}{\left[P_2(x)\right]^2}$$

$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}=\frac{h_i(x)}{\left[P_2(x)\right]^2}$, onde $grau(h_i(x))=2d+\ell$, com $d=grau(P_2(x))$

Desta forma, $\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \dfrac{h_i(x)}{P_2^{\,2}(x)}$ satisfaz a hipótese de indução, portanto $\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_i}$ é de classe $C^{\ell-1}$. Logo F(x) é de classe C^{ℓ}. ∎

Exemplos

Exemplo 1: Seja $P_2(x,y,z)$ o polinômio $x^2+y^2+z^2$. Claramente $P_2(x,y,z)$ restrito à esfera $S^2=\{(x,y,z)\in\Re^3;\quad x^2+y^2+z^2=1\}$ é constante e igual a 1. Portanto a função $f_r(x,y,z)=\dfrac{x^r+y^r+z^r}{x^2+y^2+z^2}$ em que $r\geq 4$ é de classe C^{r-3}.

Observação: Uma pergunta natural que surge é como obtemos um polinômio homogêneo $P(x)$, de tal forma que $min\{\|P(x)\|;\quad x\in S^{n-1}\}>0$. Isto equivale a determinarmos um polinômio $P(x)$, em que $P(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)\in S^{n-1}$. É de fácil verificação que os polinômios da forma $P(x_1,\ldots,x_n)=x_1^{2r}+\cdots+x_n^{2r}$, em que r é um número inteiro positivo, satisfazem esta condição, pois tais polinômios só se anulam na origem de $\Re^n$.

A proposição seguinte nos fornece uma família de polinômios, satisfazendo a condição da observação anterior, para o caso de duas variáveis.

Proposição 1 - Considere $P_2(x,y)=ax^2\pm 2xy+by^2$ em que $a,b\in\Re$. Se ($ab>1$, $a>0$ e $b>0$) então $P_2(x,y)>0$, para todo $(x,y)\in\Re^2-\{0\}$.

Demonstração: Sabemos que $0\leq(x\sqrt{a}+y\sqrt{b})^2=|a|x^2+2\sqrt{ab}xy+|b|y^2$, o que implica em $2\sqrt{ab}xy\geq-(|a|x^2+|b|y^2)=-(ax^2+by^2)$. De forma análoga, como $0\leq(x\sqrt{a}-y\sqrt{b})^2=|a|x^2-2\sqrt{ab}xy-|b|y^2$, obtemos $2\sqrt{ab}xy\leq(|a|x^2+|b|y^2)=(ax^2+by^2)$.

Universidade Regional do Cariri – URCA
CADERNOS DE CULTURA E CIÊNCIA
Vol. 3- Nº 1 2008

Portanto

$| 2\sqrt{ab}xy | \leq ax^2 + by^2$.

Assim, como $| 2xy | < | 2\sqrt{ab}xy |$, temos que $| 2xy | < ax^2 + by^2$. Desta forma, $-(ax^2 + by^2) < 2xy < (ax^2 + by^2)$ o que nos dar $P_2(x_1, x_2) = ax^2 \pm 2xy + by^2 > 0$. ■

Exemplo 2 - Verifiquemos se $P(x) = 2{,}5x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2 > 0$ quando restrito a $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Tomemos $\alpha = \dfrac{1}{4}$, assim mostrar que $P(x) > 0$ equivale a mostrar que $\alpha P(x) > 0$. Desta forma:

$$\frac{1}{4}P(x) = \frac{1}{4}(2{,}5x_1^2 - 8x_1x_2 + 8x_2^2) = 0{,}625x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

No entanto este último polinômio satisfaz as condições do *Teorema 2*, já que

$$0{,}625 \cdot 2 = 1{,}25 > 1$$

Logo $\alpha = \dfrac{1}{4} > 0$ implica em $P(x) > 0$. Em particular, quando restrito a $x_1^2 + x_2^2 = 1$, tem-se ainda $P(x) > 0$.

Exemplo 3 - Tomemos, pela *Proposição 1*, os seguintes polinômios:

$$Q_1(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 1{,}5x_2^2)^3 > 0$$

$$Q_2(x_3, x_4) = (x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2)^3 > 0$$

Assim, $W(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1^2 - 2x_1x_2 + 1{,}5x_2^2)^3 + (x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2)^3 > 0$. Observe que $W(x_1, x_2, x_3, x_4)$ é um polinômio homogêneo de grau 6 e com 4 variáveis.

Como $W(x_1, x_2, x_3, x_4) > 0, \forall x_i \in \Re$, em particular o polinômio W quando restrito à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ é maior do que ZERO, a qual satisfaz a condição do *Teorema 1*.

Assim, por exemplo:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^{10} - 2x_2x_3x_4^8 - x_3^{10}}{(3x_1^2 - 2x_1x_2 + 1{,}5x_2^2)^3 + (x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2)^3}$$, é de classe C^3.

Referências bibliográficas

[1] M. A. S. Ruas, On the degree of C^{ℓ}-determinacy. *Math. Scandinava*, 59 (1986), 59-70.